Геометрия пчелиных сот

Образовательная область: учебный проект - математика

Выполнил: ученик 8 класса

ТМКОУ «Диксонской средней школы»

Нечеухин А.М.

Научный руководитель: Низовцева Д.А.

учитель математики

2012-2013 уч. год

Цель и задачи работы

Цель работы:

- 1) Рассмотреть связь между математикой и окружающей жизнью

  2) Установить зависимость между стороной правильного многоугольника и его площадью и периметром.

Задачи:

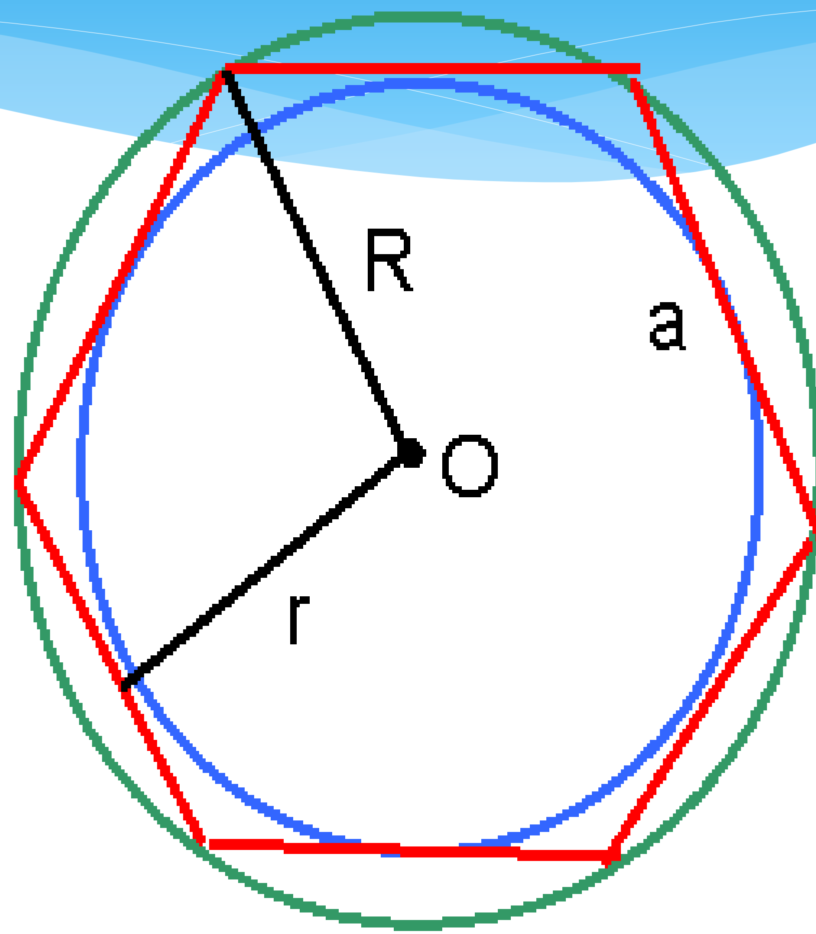
* Проанализировать литературу по данному вопросу;
* Изучить свойства правильных многоугольников и вывести формулы площадей треугольника, шестиугольника;
* Исследовать вопрос, какими многоугольниками можно заполнить прямоугольную область без просветов;
* Исследовать периметры многоугольников, имеющих одинаковую площадь.
* Провести испытание модели пчелиных сот (модели Тота)

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ В ПРИРОДЕ

Правильные многоугольники встречаются в природе. Один из примеров – пчелиные соты, которые представляют собой многоугольник покрытый правильными шестиугольниками. На этих шестиугольниках пчёлы выращивают из воска ячейки. В них пчёлы и откладывают мёд, а за тем снова покрывают сплошным прямоугольником из воска.

Правильные многоугольники

* Выпуклый многоугольник называется ***правильным,*** если у него все стороны равны и все углы равны.
* ***Центром правильного многоугольника*** называется точка, равноудаленная от всех его вершин и всех его сторон.
* ***Центральным углом правильного многоугольника*** называется угол, под которым видна сторона из его центра.



Свойства правильных многоугольников

- Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности, при этом центры этих окружностей совпадают

- Центр правильного многоугольника совпадает с центрами вписанной и описанной окружностей.

- Периметры правильных *n*-угольников относятся как радиусы описанных окружностей.

✓ Сторона правильного n–угольника:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

✓ Площадь правильного n–угольника:

$$S_n = \frac{1}{2}P_n r; \quad S_n = \frac{1}{2}R^2 \cdot n \cdot \sin\frac{360^0}{n}$$

«Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».

Мнение пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»

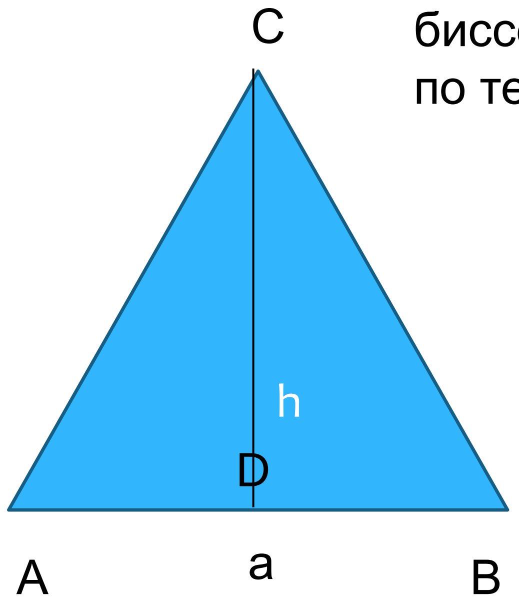
? Исследование № 1

Вывести формулы для площадей правильных многоугольников

$$S = \frac{1}{2} h_a a$$

Вывод формулы площади правильного треугольника

По свойству равностороннего треугольника: высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой, то CD = a/2. Из треугольника ADC (угол D=90) по теореме Пифагора, имеем:



$$CD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

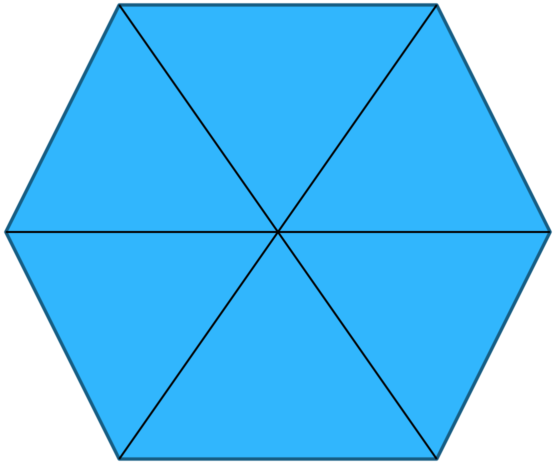
$$h_a = CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} a \bullet \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Вывод формулы площади правильного шестиугольника

Для правильных шестиугольников верно, что радиус окружности, описанной около него равен его стороне.



$$s_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_6 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Вывод: Нами выведены формулы площади правильного шестиугольника и треугольника для дальнейшего исследования.

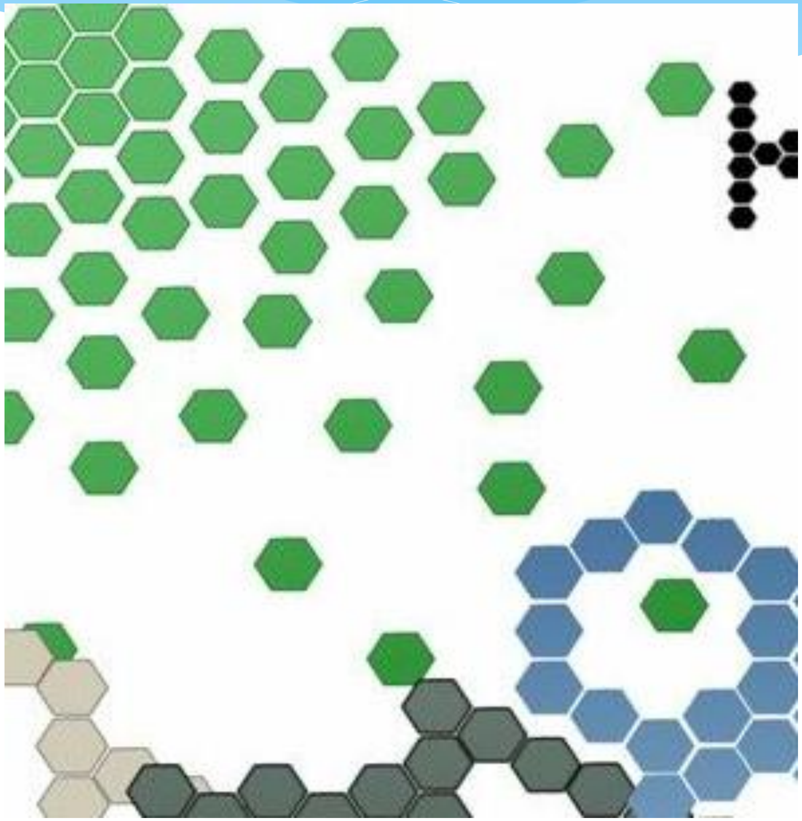
«Далее этой ступени совершенства в архитектуре естественный отбор не мог вести, потому что соты пчёл абсолютно совершенны с точки зрения экономии труда и воска»

Ч. Дарвин

?

Исследование № 2

Пчелиные соты представляют собой прямоугольник, покрытый правильными шестиугольниками. Найти какими ещё правильными многоугольниками можно покрыть плоскость.



Метод уравнений

* Предположим, что плоскость покрыта правильными n-треугольниками, причём каждая вершина является общей для X таких многоугольников, α – внутренний угол правильного многоугольника, равный
* α=180°(n-2) : n, тогда 180°(n-2) x : n= 360°
* Учитывая, что X –целое, получаем n= 3,4,6.

Вывод: плоскость можно покрыть треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками.

Метод перебора.

* n=3. Три угла, плотно составленные, составляют 180°, шесть углов - 360°. Плоскость покрыта без просветов.
* n=4. Четыре внутренних угла вместе дают 360°, плоскость покрыта без просветов.
* n=5. Внутренний угол правильного многоугольника равен 108°, остаётся просвет в 36°. Плоскость без просветов не покрывается.
* n=6. Внутренний угол правильного шестиугольника равен 120°, три шестиугольника, составленные вместе, образуют 360°. Плоскость покрывается без просветов.

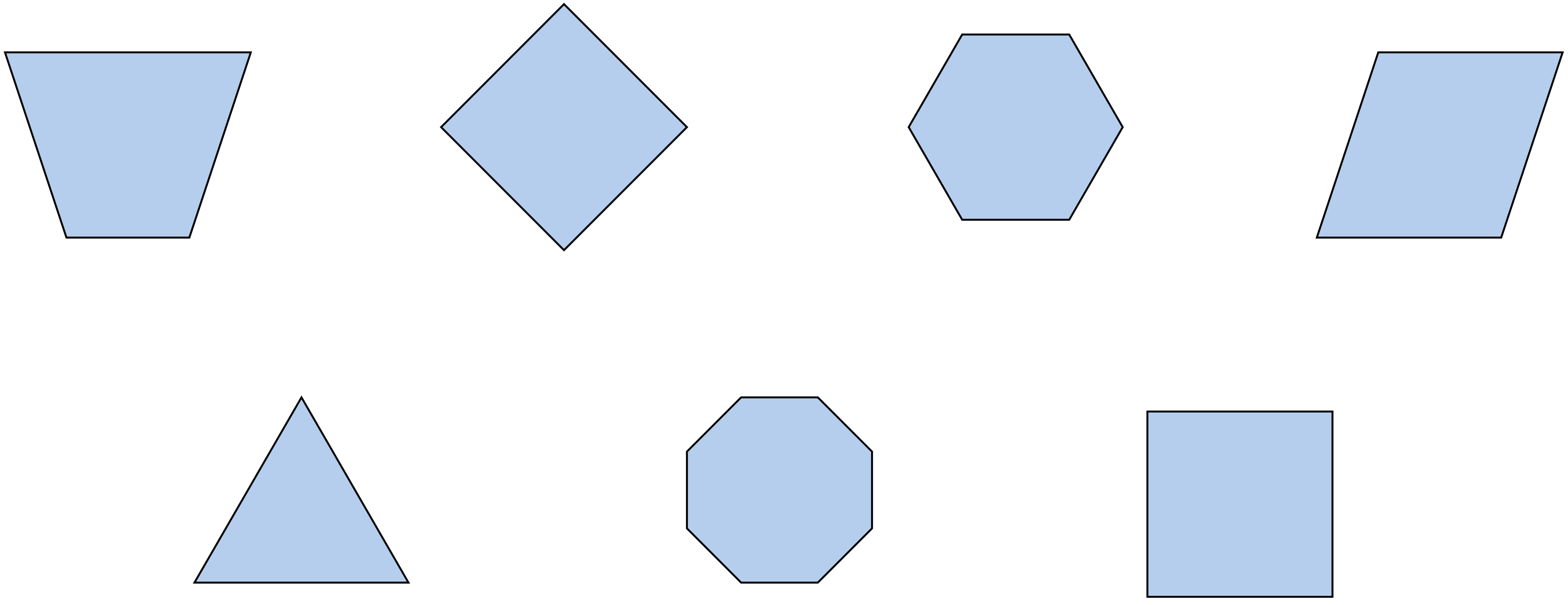
Вывод: Метод перебора можно продолжать и дальше, итогом будет служить то, что без просветов плоскость можно покрыть лишь правильными треугольниками, квадратами, правильными шестиугольниками.

«Странные общественные привычки и геометрические дарования пчёл не могли не привлечь внимания и не вызвать восхищения людей, наблюдавших их жизнь и использовавших плоды их деятельности» *Г. Вейль*

Исследование №3

Почему пчёлы выбрали именно шестиугольник?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить периметры разных многоугольников, имеющих одинаковую площадь.



Сравним периметры этих многоугольников, если их площади равны. Имеем:

$$S_3 = S_4 = S_6 = S,$$

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ a = 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}};\ P_3 = 6\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}};$$

$$S_4 = a^2,\ a = \sqrt{S};\ P_4 = 4\sqrt{S};$$

$$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},\ a = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}};\ P_6 = 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}};$$

$$P_3 : P_4 : P_6 = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} : 4 : 6\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \approx 4{,}6 : 4 : 3{,}7.$$

Вывод: Метод перебора можно продолжать и дальше, итогом будет служить то, что без просветов плоскость можно покрыть лишь правильными треугольниками, квадратами, правильными шестиугольниками.

? Исследование № 4

Испытание модели пчелиных сот (модель Тота)

Цель: получить модель пчелиной соты.

Приборы и материалы: две стеклянные пластинки, вода, емкость, порошок, блендер (для получения воздушной пены)

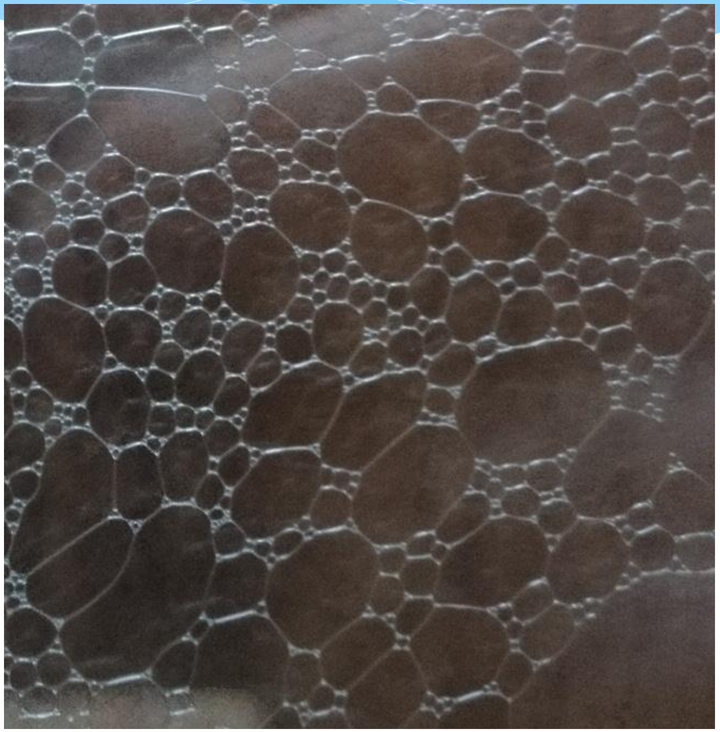
Задача:

1) Убедиться в правильности идеи Тота
2) Исследовать фотографию модели.
3) Сделать вывод

* **1этап.** Используем жидкую воздушную пену, которую равномерно распределили на одном из стекле, пузырьками среднего диаметра в 2 мм, и накрыли сверху вторым стеклом.
* **2 этап.** Пузырьки, прикасавшиеся к стеклам, начинали превращаться в шестиугольные структуры. Посередине границы двух слоев образовались описанные Тотом формы двух шестиугольников и двух четырехугольников.
* **3 этап.** При сжатии стекол с пузырьками произошел интересный случай. Образовавшаяся структура вдруг, как и у пчел, превратилась в форму трех равносторонних четырехугольников.

Фотографии этапов эксперимента

2 этап



3 этап

Заключение

На этом математические секреты пчёл не заканчиваются. Интересно и дальше исследовать строение пчелиных сот. Расчётливые пчёлы заполняют пространство, экономя при этом воск.

Как не согласиться с мнением Пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: «Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».

Так с помощью геометрических вычислений мы прикоснулись к тайне природы, ещё раз убедившись во всесторонней эффективности математики.

Литература:

1.Глухова А., Правильные многоугольники в природе.
2.Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете « Первое сентября», № 38, 1999.
3. Фирсина С., Правильные многоугольники. Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете « Первое сентября», № 10, 2000.
4.Шарыгин И.Ф.,Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. Учебное пособие для 5-6 классов. - М.: МИРОС, 1992.
5. Геометрия 7-9 класс А.В. Погорелов, М.: Просвещение.

Спасибо за внимание!