Решение задач "Углы в пространстве"

10 класс

А.В. Погорелов,"Геометрия 10-11"

Цели и задачи урока:

- **Образовательные :**

рассмотрение всех возможных комбинаций углов в пространстве (угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью), решение геометрических задач классическим и координатно-векторным методами; формирование навыков чтения чертежей, умений проводить дополнительные построения и вычисления;

- **Развивающие:**

формирование умения выполнять обобщение и конкретизацию, развитие качества мышления: гибкость, целенаправленность, рациональность, критичность с учетом индивидуальных особенностей;

- **Воспитательные:**

Развитие взаимовыручки и взаимопомощи, умение вести культурную дискуссию, умение четко организовывать самостоятельную и индивидуальную работу.

Теоретический материал

1. Угол между скрещивающимися прямыми.

   классический   координатно-векторный

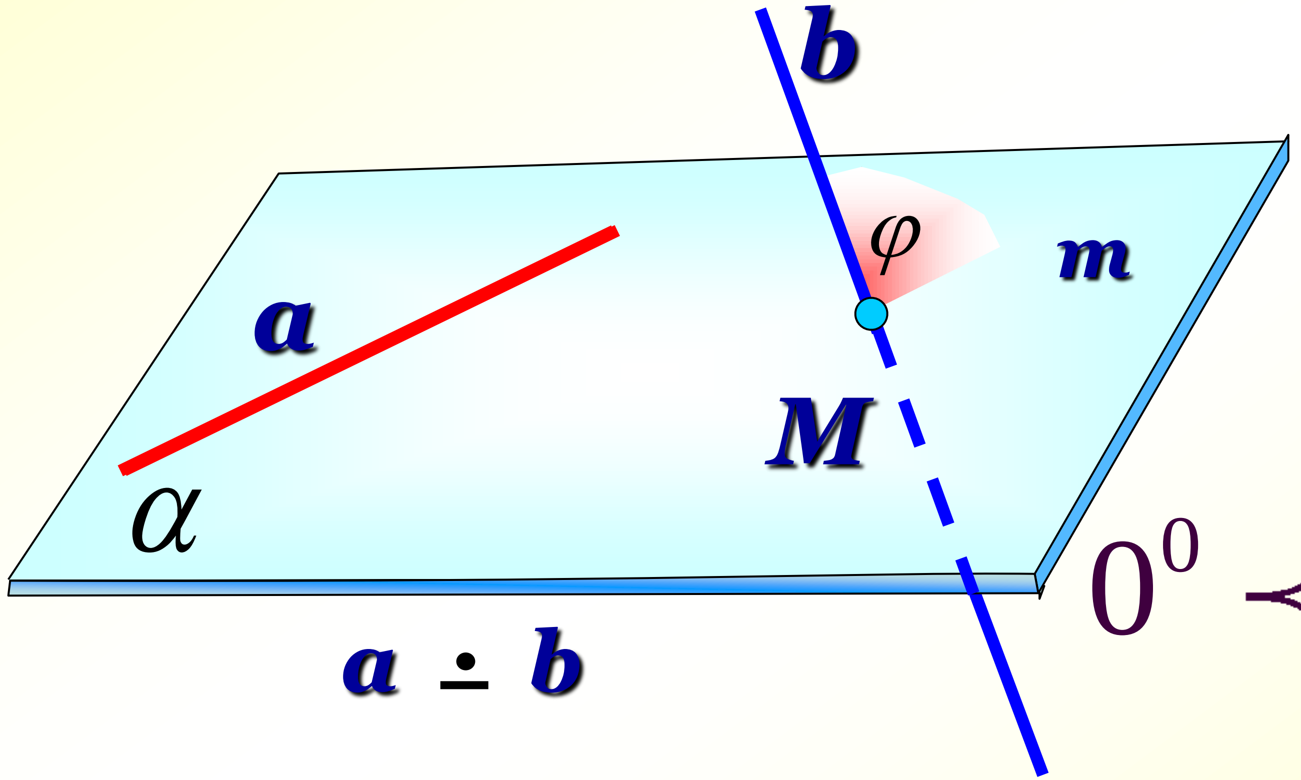
2. Угол между прямой и плоскостью.

   классический

3. Теорема о трех перпендикулярах

4. Теорема косинусов

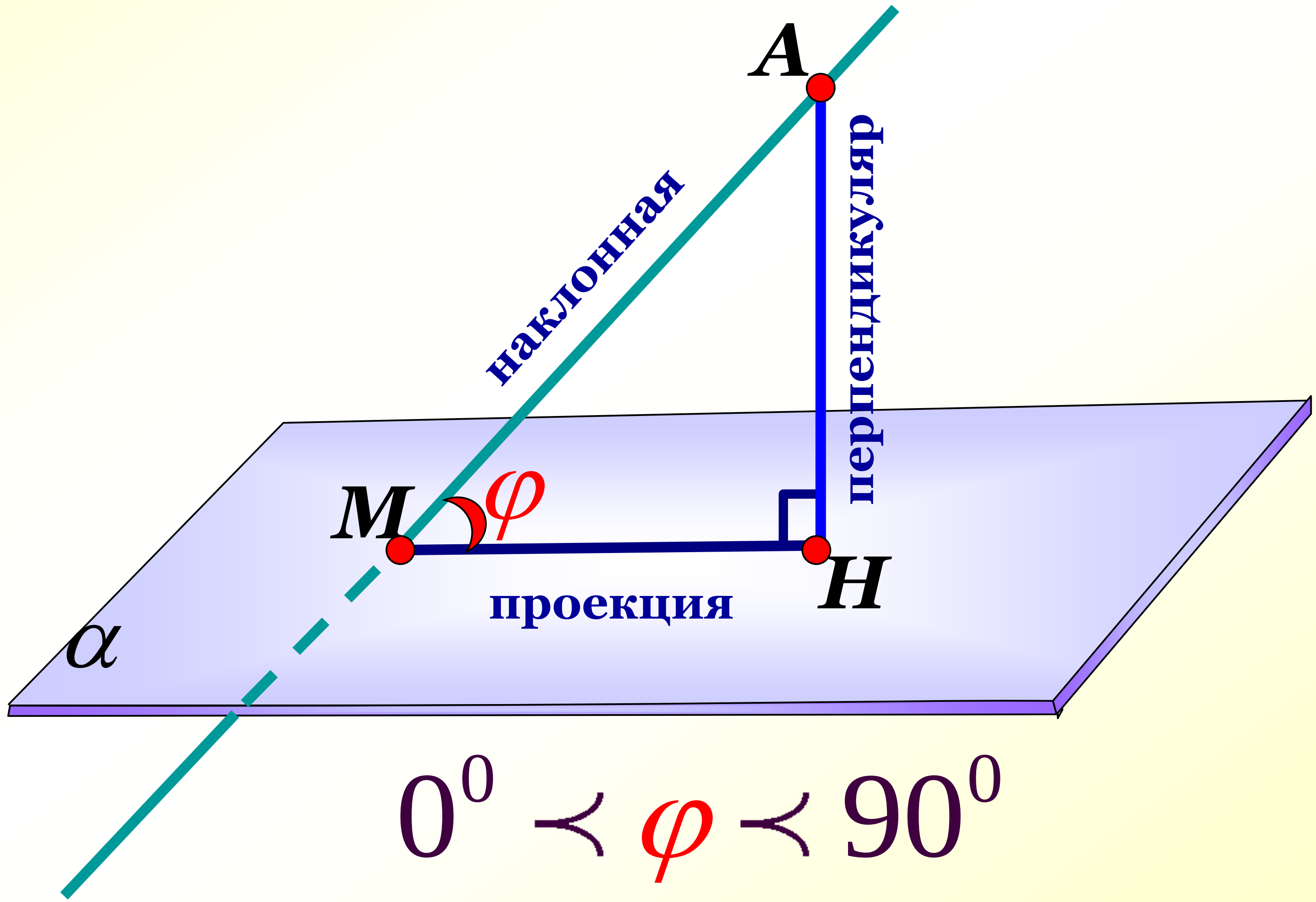
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися.



$$0^0 \prec \varphi \le 90^0$$

Точку М можно выбрать произвольным образом.
В качестве точки М удобно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

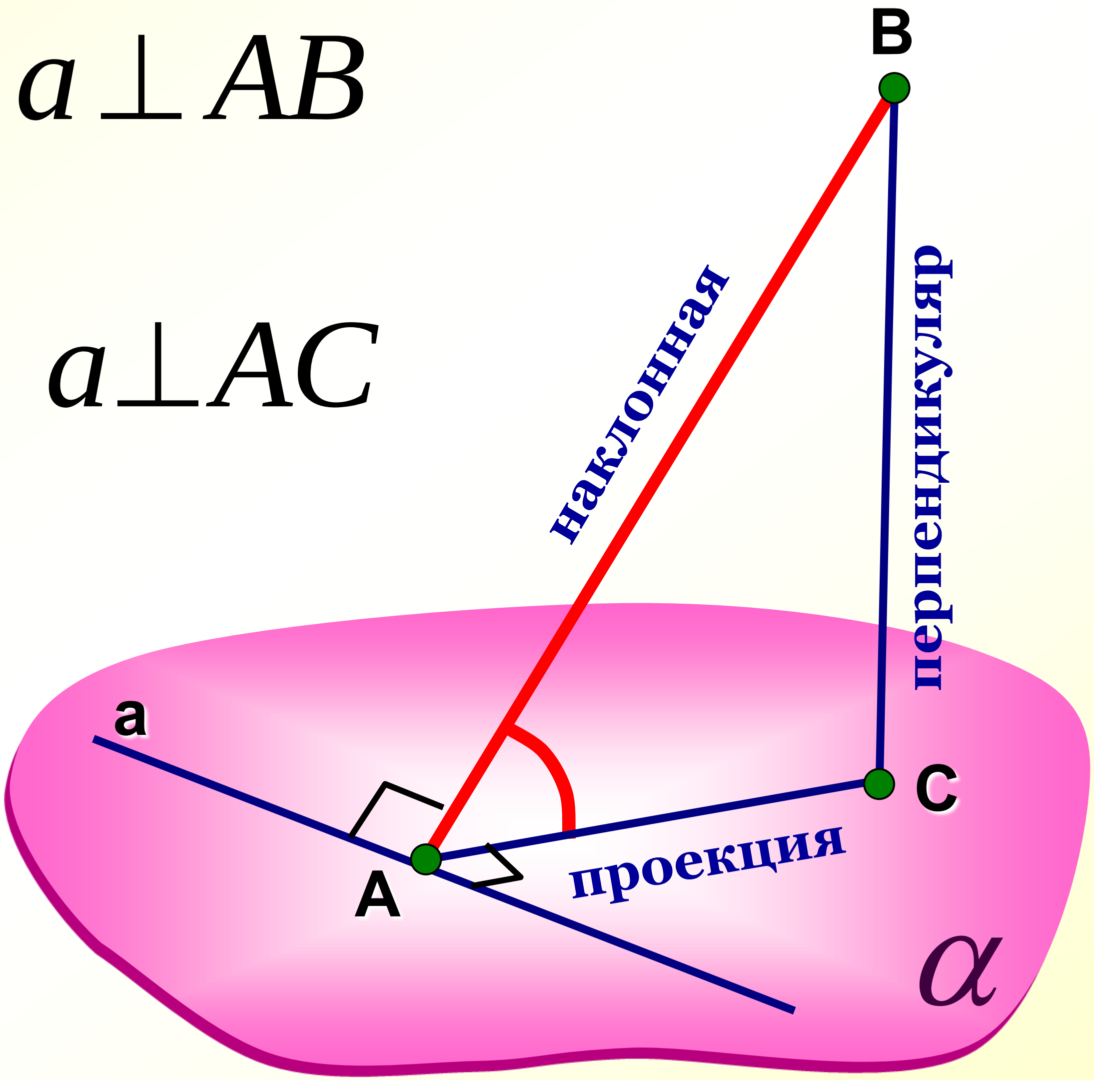
Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



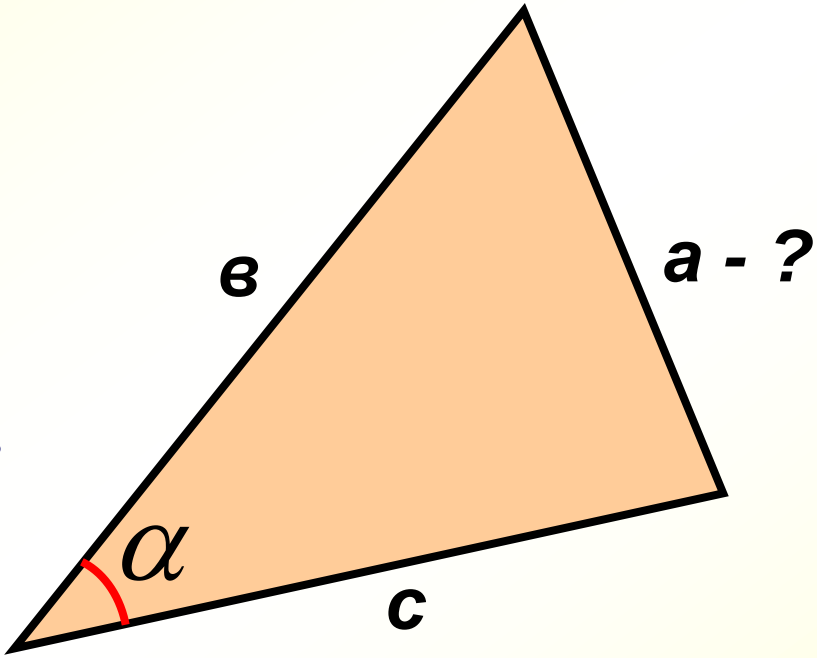
$$0^0 \prec \varphi \prec 90^0$$

$$a \perp AC \overset{\text{ТТП}}{\Rightarrow} a \perp AB$$

$$a \perp AB \overset{\text{ТТП}}{\Rightarrow} a \perp AC$$

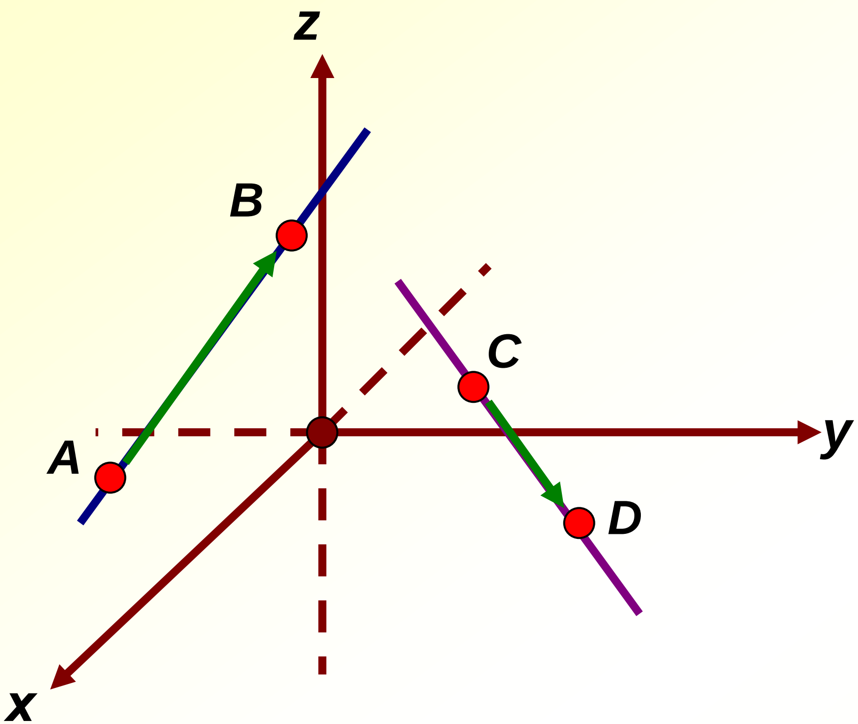


Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



$$\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\overrightarrow{CD}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = m.$$

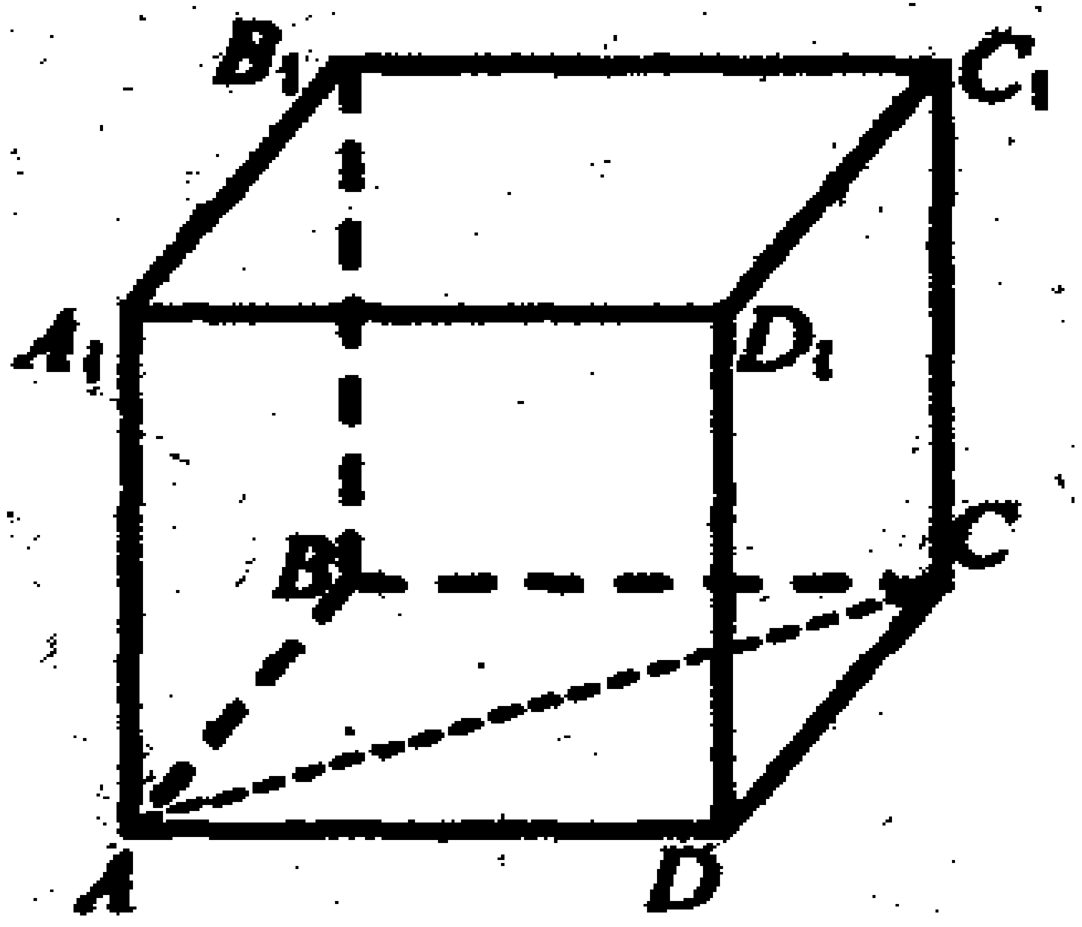
$$\varphi = \arccos m$$

Самостоятельная работа

А)на рисунке 1 построить прямые AB_1 и CD_1. Определить угол между этими прямыми.

Б)на рисунке 2 найти угол между прямыми CD_1 и BC_1.

В)на рисунке 3 найти угол между прямыми B_1D и AC


B1
C1
A1
D1
B
C
A
D

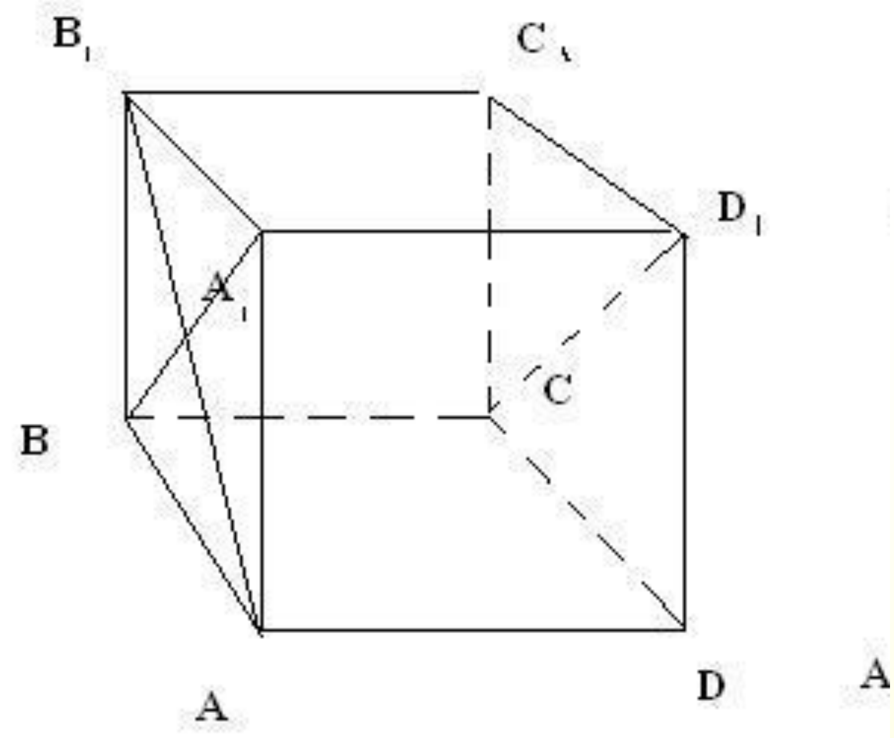
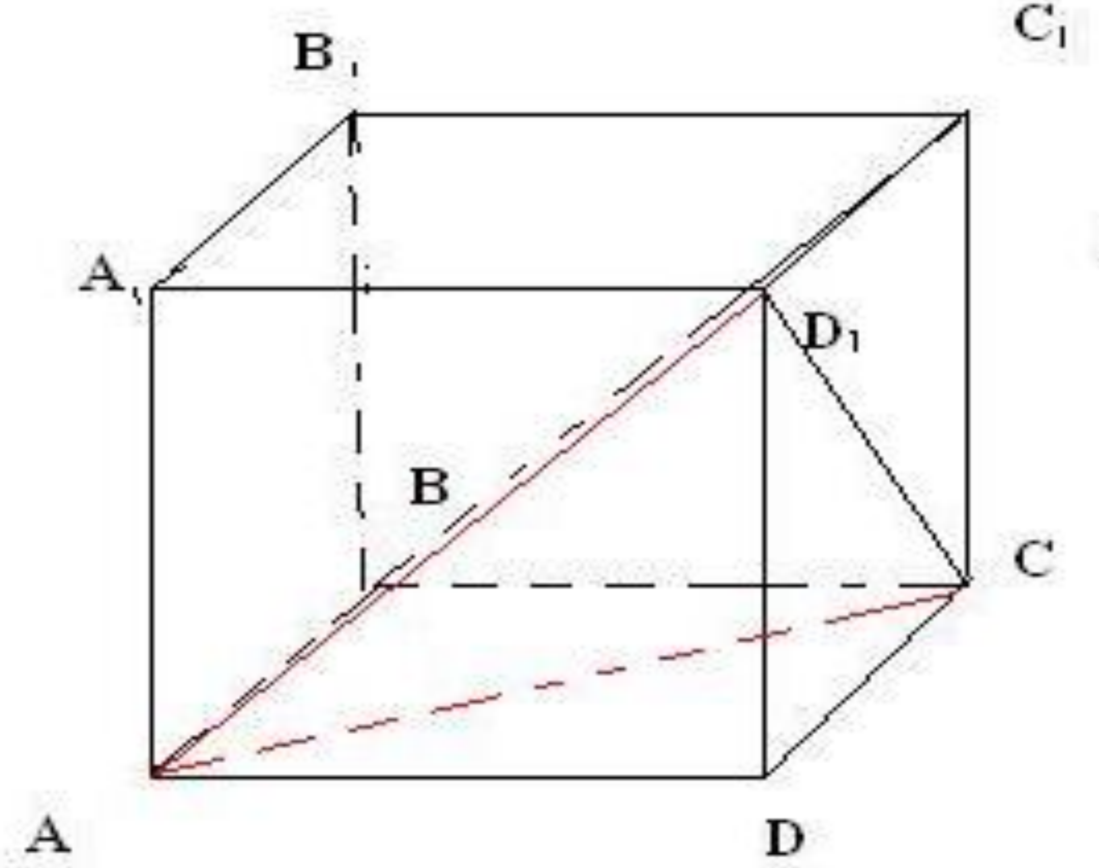


РИС.1

Ответ: 90



Ответ: 60

РИС.2

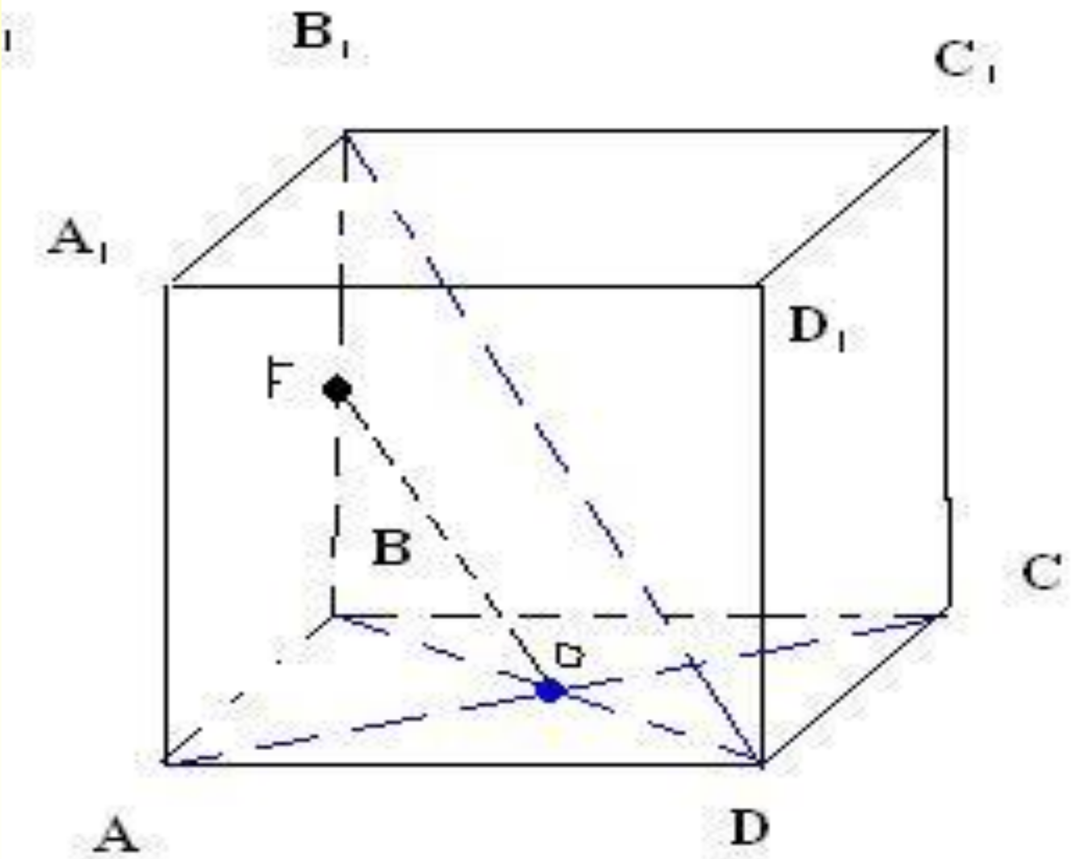
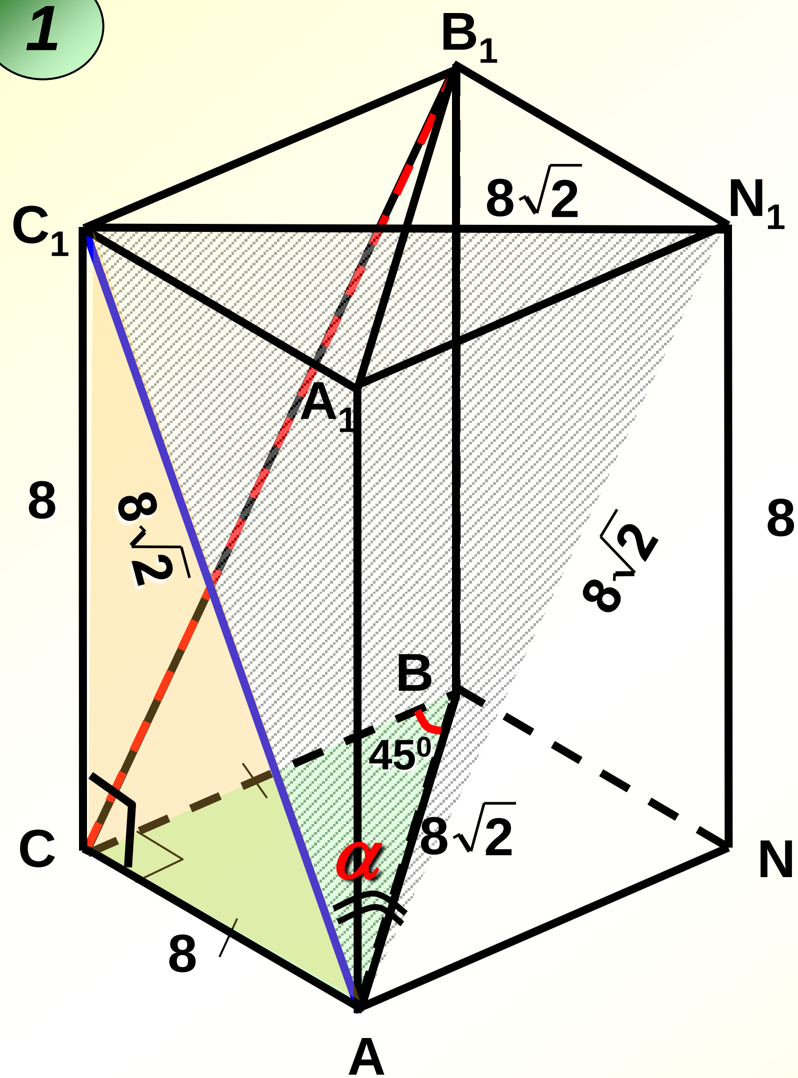


РИС.3

Ответ: 90

Задачи на готовых чертежах

1



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма

ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник

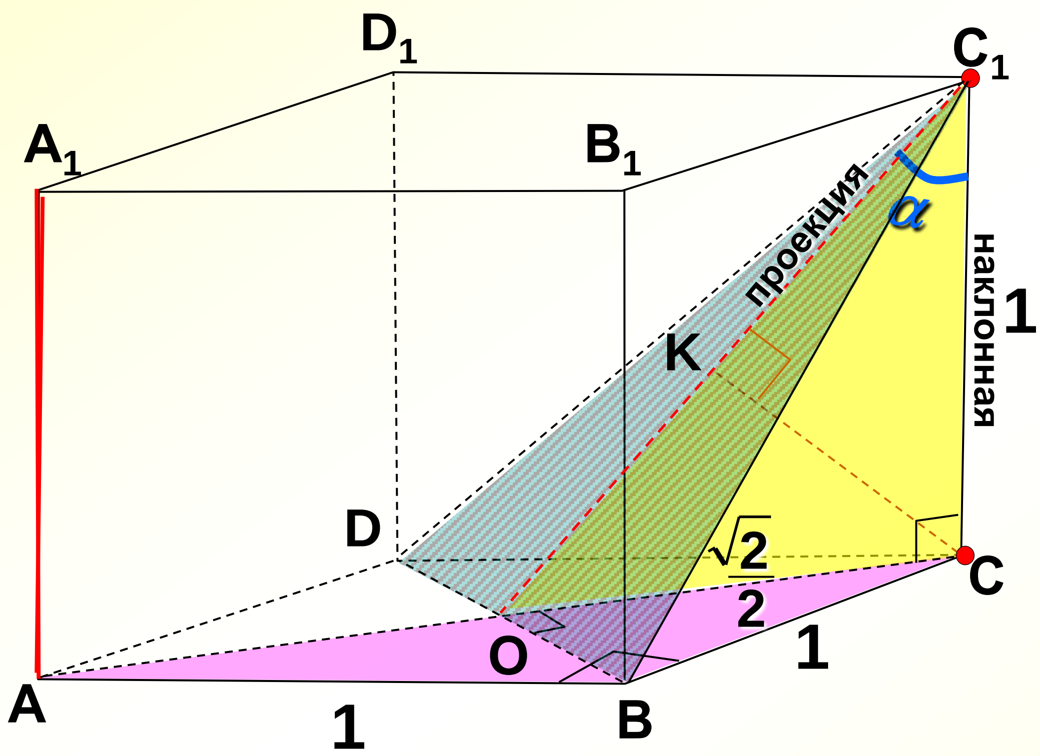
$AB = 8\sqrt{2}$ $CC_1 = 8$

Найти: $\varphi = \left(AC_1, CB_1\right)$

Ответ: 60^0

Задачи на готовых чертежах

2



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб

Найти:

$$\varphi = \left(AA_1, BC_1D \right)$$

Ответ: $arctg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение геометрических задач

1 Точка E – середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми AE и CA_1.

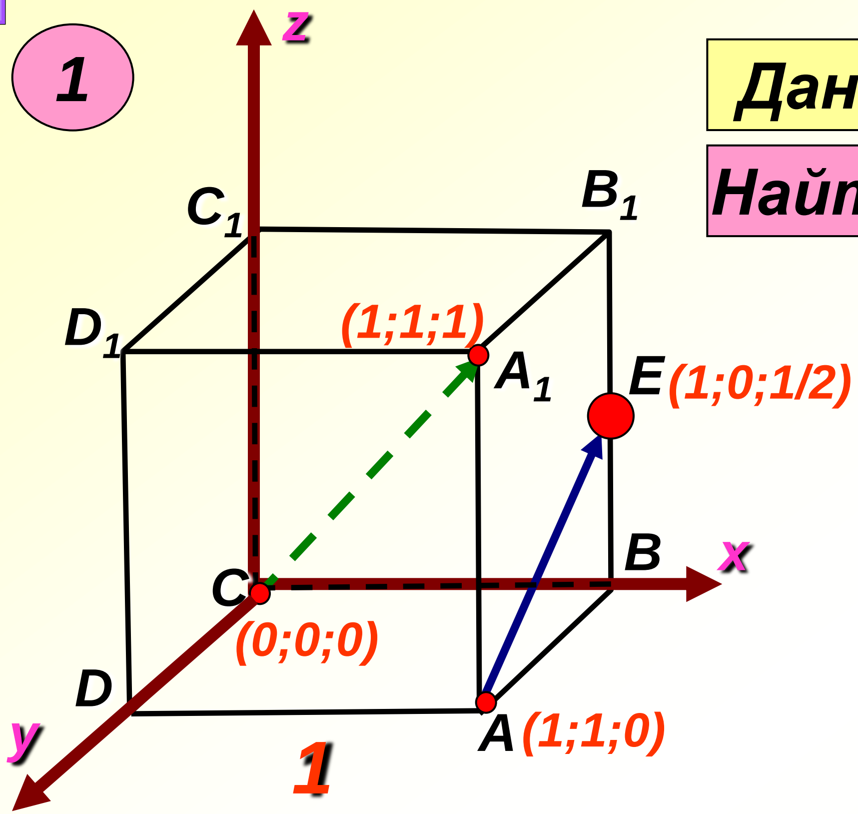
координатно-векторный

2 Дополнительная задача.

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC. AB = AC = 5, BC = 8. Высота призмы равна 3. Найти угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

классический

1



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $BE = EB_1$.

Найти: $\varphi = \left(AE, CA_1\right)$

Решение:

Введем систему координат.

Определим координаты точек A, E, C, A_1

$$\varphi = \left(AE, CA_1\right) = \left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{CA_1}\right)$$

Направляющие векторы прямых:

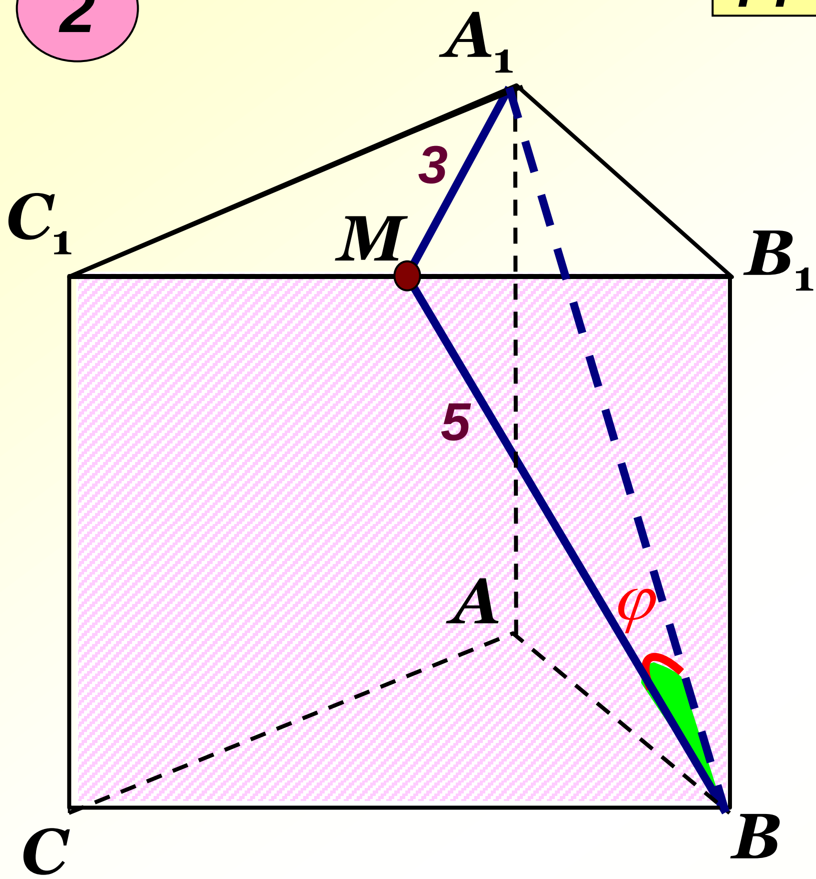
$$\overrightarrow{CA_1}\,\{1;1;1\},\ \overrightarrow{AE}\left\{0;-1;\frac{1}{2}\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CA_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA_1}\right|} = \frac{\left|0\cdot 1 - 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\right|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}.$

2



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, ΔABC – равнобедренный $AB = AC = 5$, $BC = 8$, $CC_1 = 3$.

Найти: $\varphi = \left(A_1B, BCC_1\right)$

Решение:

Из $\Delta A_1B_1C_1$: $A_1M \perp (BCC_1)$

BM – проекция A_1B на (BCC_1)

$$\varphi = \left(A_1B, BCC_1\right) = \angle A_1BM.$$

Т.к. $B_1M = 4$, $BB_1 = 3$, то $BM = 5$

$$A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1M^2} = 3.$$

Из ΔA_1BM: $tg\varphi = \dfrac{A_1M}{MB} = \dfrac{3}{5} = 0,6.$ $\quad \varphi = arctg\,0,6.$

Ответ: $\varphi = arctg\,0,6.$

Итог урока:

Ответьте на вопросы

1) Как определить угол между скрещивающимися прямыми классическим или координатно-векторным методом ?

2) Как определить угол между прямой и плоскостью классическим или координатно-векторным методом ?

3) Что нового вы узнали сегодня на уроке ?

Домашее задание:

Высота прямой призмы ABCLEF равна 12. Основание призмы треугольник ABC, в котором CB = AC; AB =18; tg угла B = 0,4

Найти тангенс угла между прямой CE и плоскость ALEB.